Le formalisme quadri-dimensionnel pour justifier le choix des dérivées objectives - application à la construction de modèles hypoélastiques

E. Rouhaud[a], O. Ameline[a], M. Wang[a], B. Panicaud[a], A. Roos[a], R. Kerner[b]

a. *Université de Technologie de Troyes*
b. *Université Pierre et Marie Curie*

Résumé :

La description correcte des non-linéarités lors des transformations finies d'un milieu continu est une nécessité pour accrocher un comportement cinématique réaliste. Nous proposons ainsi d'utiliser les outils mathématiques de la géométrie différentielle dans le cadre d'un formalisme quadridimensionnel et curviligne de l'espace-temps pour écrire des modèles de comportement. Cette approche garantie une description dite "covariante" des transformations subies par la matière, c'est-à-dire valable pour tous les systèmes de référence. Cette approche a fait ses preuves en physique, en particulier en relativité générale. Le but est de résoudre les difficultés qui se posent encore avec la notion d'objectivité matérielle, ambigüe en 3D. Le principe de covariance généralisée est donc appliqué à des transformations qui restent celles de la mécanique classique des milieux continus (c'est-à-dire sans aucun effet relativiste et en particulier pour des vitesses qui restent toujours bien en deça de la vitesse de la lumière). Une approche incrémentale est proposée où le formalisme quadri-dimensionnel apporte des réponses uniques sur le choix de la dérivée "objective", comparé à la multitude des choix possibles en 3D. Des exemples de calculs sont proposés pour des modèles de comportements simples.

Abstract :

The correct description of non-linarities when finite transformation of a continuous medium is a needing to have a realistic kinematics. We propose here to use the mathematical tools of differential geometry with a four-dimensional and curvilinear space-time to build mechanical behaviors models. This approach enables a "covariant" description of the transformations of the continuous medium, whatever the observer.This approach leads to good results in physics, especially in general relativity. The aim is to solve the difficulties that are yet open concerning the "principle" of material objectivity, which is quite ambiguous in 3D. The generalised covariance principle is applied to transformations that concerns only classical mechanics of continuous media (i.e. without any relativistic effects and in particular for velocities that are small to the speed of light). An incremental approach can then be provided. The use of the four-dimensional formalism enables to justify the choice of specific time derivatives, compared to the multiple 3D objectives ones. Examples of solutions are proposed for specific behaviors.

Mots clefs : **transformations finies ; géométrie différentielle ; objectivité matérielle**

1 Introduction

Dire qu'un modèle de comportement doit vérifier le principe d'objectivité matérielle semble a priori un lieu commun dans le domaine de la mécanique des milieux continus. Ce principe a été étudié de façon abondante, détaillé et discuté par de nombreux auteurs. Un important problème concerne la définition des dérivées par rapport au temps respectant ce principe d'indifférence matériel, en termes de variation d'un tenseur par rapport au temps. Ces dérivées apparaissent dans la forme incrémentale des modèles de comportement, quand l'invariance à la superposition d'un mouvement de corps rigide est requise. Mais la dérivée d'un tenseur objectif n'est pas, en général, objective. Pour résoudre ce problème en 3D, des transports objectifs sont alors définis. Ils sont la plupart du temps appliqués sur le tenseur des contraintes de Cauchy. Le résultat de ces opérateurs de dérivation peut être démontré invariant à la superposition d'un mouvement de corps rigide [1]. Une des difficultés réside en fait dans le choix du "bon" transport objectif parmi l'infinité de transports possibles [1]. Finalement, la validité de cette approche objective et les restrictions qu'elle impose ont souvent été questionnées, voire remises en cause.

La géométrie différentielle [2], offre un cadre cohérent pour les modèles de transformations finies de la matière. Elle propose en effet un formalisme mathématique pour l'utilisation des tenseurs exprimés dans un système de coordonnées arbitraires, défini sur une variété différentielle. Les entités physiques sont alors représentées par des champs de densités de tenseurs. Ce formalisme est utilisé classiquement pour décrire les déformations d'un milieu dans un contexte tridimensionnel (3D). Dans un espace à quatre dimensions (4D), la géométrie différentielle a trouvé une application majeure en physique avec la Relativité Générale [3] qui a démontré ses capacités à décrire correctement les transformations générales de l'espace-temps. Le principe de covariance garantit alors une écriture correcte des relations de la physique dans n'importe quel système de référence (voir par exemple [4]).

Cet article propose donc d'utiliser le principe de covariance pour décrire un milieu continu et ainsi garantir l'invariance par changement d'observateurs des tenseurs, équations et modèles de comportement. Un intérêt majeur réside dans la possibilité d'exprimer des dérivées dans le temps indépendantes de l'observateur.

2 Le formalisme 4D et le principe de covariance

Dans ce cadre, l'espace est paramétré avec quatre coordonnées. La quatrième coordonnée correspond au temps. Un système de coordonnées curvilignes x^μ paramètre alors des *événements* tels que :

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^i, ct) \tag{1}$$

Içi, l'indice μ varie de 1 à 4, et l'indice i de 1 à 3. Les indices grecs font référence à des entités 4D, tandis que les indices latins ne représentent que la partie spatiale de ces entités. La quatrième coordonnée x^4 correspond au temps t multiplié par une vitesse de référence c. Si z^μ représente les coordonnées 4D d'un événement décrit dans un système Cartésien inertiel, ce système est dit Galiléen/Minkowskien. Un intervale ds est alors défini tel que :

$$(ds)^2 = (dz^4)^2 - (dz^1)^2 - (dz^2)^2 - (dz^3)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

où les $g_{\mu\nu}$ correspondent aux composantes covariantes du tenseur métrique associées au système de coordonnées x^μ. Les entités physiques sont représentées par des tenseurs 4D qui sont par essence invariants par changement de coordonnées 4D. Si le même événement est maintenant paramétré à l'aide de deux systèmes de coordonnées curvilignes x^μ et $\widetilde{x}^\mu$, les composantes d'un tenseur de second ordre $\boldsymbol{\alpha}$ se transforment alors comme :

$$\widetilde{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\kappa} \alpha^{\lambda\kappa} \tag{3}$$

L'objectif du présent travail est de décrire les transformations finies d'un matériau solide en suivant les hypothèses classiques de la mécanique des milieux continus. On définit donc un observateur et une particule de façon classique. Dans ce cadre, la vitesse d'une particule, quel que soit le phénomène observé, reste très inférieure à la vitesse de la lumière. Nous retenons donc ici les hypothèses classiques de la physique de Newton. Le temps est ainsi défini comme un temps absolu. La vitesse de référence c correspond alors à un paramètre dimensionnel utile pour décrire le temps et les longueurs grâce à une seule dimension.

Les observations physiques permettent de conclure que la présence, la nature et la quantité d'observateurs ne changent pas les phénomènes subis par la matière. Les observateurs doivent donc pouvoir s'accorder sur l'évaluation des quantités observées. Cela correspond au *principe de covariance*, initialement proposé par A. Einstein [4]. Il établit le fait qu'une équation doit être exprimée sous une forme équivalente pour tous les observateurs. Cela est possible grâce à une description 4D covariante de la physique.

3 Objectivité, covariance et invariance par superposition de mouvements rigides

De façon classique en 3D, un référentiel est associé à un observateur. Il donne la possibilité de paramétrer l'espace et le temps. Il est défini comme un mouvement rigide des vecteurs de base à partir d'un référentiel fixe inertiel. Si le même événement est décrit par deux observateurs en utilisant respectivement les coordonnées (x^i, t) et $(\widetilde{x}^i, t)$, alors une matrice orthogonale et un vecteur existe, tels que :

$$\widetilde{x}^i = Q^i{}_j(t)x^j + d^i(t) \tag{4}$$

où $Q^i{}_j$ et d^i représentent respectivement une rotation et une translation d'un référentiel par rapport à l'autre. Un tenseur d'ordre deux $\boldsymbol{T}$ est dit *objectif ou indifférent par changement de référentiels* s'il vérifie la transformation :

$$\widetilde{T}^{ij} \;=\; Q^i{}_k(t)Q^j{}_l(t)T^{kl} \tag{5}$$

Des équations similaires peuvent être écrites pour des tenseurs de rang différent.

Truesdell et Noll [1] définissent le principe d'objectivité comme : "*it is a fundamental principle of classical physics that material properties are indifferent, i.e., independent of the frame of reference or observer*". Nemat Nasser [5] le définit de son côté comme : "*Constitutive relations must remain invariant under any rigid-body rotation of the reference coordinate system. This is called objectivity or the material frame indifference.*" Finalement Liu [6] conclut, "*the principle of material frame indifference plays an important role in the development of continuum mechanics, by delivering restrictions on the formulation of the constitutive functions of material bodies. It is embedded in the idea that material properties should be independent of observations made by different observers. Since different observers are related by a time-dependent rigid transformation, known as a Euclidean transformation, material frame-indifference is sometimes interpreted as invariance under superposed rigid body motions*". Les deux notions suivantes peuvent en effet être différenciées en physique :

- D'un côté, l'invariance par superposition d'un mouvement de corps rigide : quand un solide non déformé est animé d'une cinématique de corps rigide, aucune contrainte n'est générée dans le matériau. C'est une propriété qui est vérifiée pour la plupart des grandeurs et phénomènes mécaniques, notamment dans les solides.
- De l'autre côté, l'invariance par changement d'observateurs : le fait qu'un observateur tourne autour d'un solide non déformé ne généra pas de contraintes à l'intérieur du matériau. C'est un des principes constitutif de la physique.

Quand on utilise un formalisme 3D classique les deux propriétés se traduisent par la même condition mathématique (celle donnée par l' équation 5), comme décrit par Liu. Le terme "objectif" représente donc de façon ambigüe les deux propriétés.

Il est aussi possible d'écrire le changement de référentiels de la 3D, représenté par l'équation 4, dans un cadre 4D. On a alors :

$$\begin{cases} \widetilde{x}^i = Q^i{}_j x^j + d^i \\ \widetilde{x}^4 = x^4 = ct \end{cases} \tag{6}$$

Ceci correspond à un changement de coordonnées particulier de x^μ à $\widetilde{x}^\mu$ dans l'espace-temps. La matrice Jacobienne de cette transformation des coordonnées est donnée par :

$$\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \;=\; \begin{pmatrix} Q^i{}_j & \frac{1}{c}\left(\dot{d}^i + \dot{Q}^i{}_j x^j\right) \\ 0,0,0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où $\dot{d}^i \equiv \frac{dd^i}{dt}$ et $\dot{Q}^i{}_j \equiv \frac{dQ^i{}_j}{dt}$. Le facteur $1/c$ provient de la différentiation par rapport à $x^4 = ct$ et il faut souligner que $\widetilde{x}^\mu$ est un système de coordonnées cuvilignes. Si maintenant $T^{\mu\nu}$ et $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ représentent les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux dans respectivement les deux systèmes de coordonnées considérés, on a, en appliquant l'équation 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{T}^{ij} = Q^i{}_k Q^j{}_l T^{kl} + \frac{1}{c}\left(\dot{d}^i + \dot{Q}^i{}_m x^m\right) Q^j{}_l T^{4l} + \frac{1}{c}\left(\dot{d}^j + \dot{Q}^j{}_m x^m\right) Q^i{}_k T^{k4} \\ \qquad + \frac{1}{c^2}\left(\dot{d}^i + \dot{Q}^i{}_m x^m\right)\left(\dot{d}^j + \dot{Q}^j{}_m x^m\right) T^{44} \\ \widetilde{T}^{4i} = Q^i{}_j T^{4j} + \frac{1}{c}\left(\dot{d}^i + \dot{Q}^i{}_j x^j\right) T^{44} \\ \widetilde{T}^{44} = T^{44} \end{array} \right. \tag{8}$$

Cette équation est vérifiées par *tous* les quatre-tenseurs d'ordre deux et traduit l'invariance par changement de référentiel. Elle est équivalente à l'équation 5 si seulement si les termes en bleu tendent vers zéro. Ces termes tendent effectivement vers zéro si l'on considère que c tend vers l'infini dans le cadre non-relativiste et à condition que T^{4i},T^{j4} et T^{44} soient petits par rapport à c. Donc si les termes en bleu tendent vers zéro, alors le tenseur est invariant par superposition de mouvements rigides. Mais ce n'est pas toujours le cas. En effet les "quatrième" composantes du tenseur peuvent être proportionnelles à c et ainsi avoir un effet, même dans un cadre non-relativiste.

Ceci peut être illustré de façon simple avec la quatre-vitesse. Les composantes de ce tenseur, en considérant un contexte Newtonien, sont définies comme :

$$u^\mu = \frac{d\xi^\mu}{dt} = \left(\frac{d\xi^i}{dt}, c\right) \tag{9}$$

où ξ^μ représente les coordonnées de la particule exprimées dans un système de coordonnées curvilignes x^μ. Dans un référentiel inertiel z^μ, les coordonnées de la particule sont ζ^μ. Considérons maintenant une translation rigide d'un objet décrite par le vecteur déplacement d^i ; on associe le repère x^μ au mouvement rigide. Dans ce repère, les particules de l'objet ont pour quatre-vitesse $\frac{d\xi^\mu}{dt} = (0,0,0,c)$. Comme la quatre vitesse est un tenseur, avec l'équation 7 (où $Q^i{}_j = \delta^i{}_j$), on obtient :

$$\frac{d\zeta^\mu}{dt} = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d\xi^\nu}{dt} = \begin{pmatrix} \delta^i{}_j & \frac{\dot{d}^i}{c} \\ 0,0,0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{d}^i \\ c \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ce qui correspond bien à la vitesse des particules de l'objet dans le repère inertiel z^μ. La quatre-vitesse, grâce à l'action de sa quatrième composante c, devient invariante par changement de référentiels.

Ainsi un quatre-tenseur est toujours invariant par changement de référentiels (équation 8). Ceci correspond à un principe physique : le principe de covariance et on peut en conclure que toutes les lois physiques doivent être écrites avec des quatre-tenseurs. Un tenseur peut ensuite être invariant par superposition de mouvements rigides ou pas : c'est une propriété associée à ce que représente le tenseur. Le formalisme 4D permet donc de *distinguer* ces deux notions. Il est alors nécessaire de préciser ce que veut dire "objectif". Pour éviter de possibles ambiguïtées, nous utiliserons les expressions "invariant par superposition de mouvements rigides" et "invariant par changement de référentiels".

4 Dérivées par rapport au temps

Le formalisme 4D permet de définir des dérivées par rapport au temps qui sont des quatre-tenseurs. Autrement dit ces dérivées sont par construction invariantes par changement de référentiels. Pour garantir l'invariance par changement de référentiels d'un modèle de comportement écrit sous forme variationnelle, il faut utiliser une de ces dérivées en choisissant en plus, celle qui est invariante par superposition de mouvements rigides. On considère d'abord la dérivée covariante (généralisation du gradient) telle que :

$$d\alpha^{\mu\nu} = \nabla_\lambda \alpha^{\mu\nu}\, dx^\lambda = \left(\frac{\partial \alpha^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\alpha^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\kappa\lambda}\alpha^{\mu\kappa}\right) dx^\lambda \tag{11}$$

pour les composantes contravariantes un tenseur d'ordre deux où les $\Gamma^{\nu}_{\kappa\lambda}$ sont les coefficients de la connection affine, ici métrique (symboles de Christoffel).
On peut définir deux dérivées par rapport au temps qui respectent le principe de covariance. Un taux covariant noté $\frac{D}{Dt}$, généralisation de la dérivée totale, et qui correspond à une variation du tenseur pour un incrément de temps dans la direction du mouvement [4]. Dans le cadre des hypothèses de cet article, cette dérivée s'écrit de facon intrinsèque comme :

$$\lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\alpha}(\xi^i, t') - \boldsymbol{\alpha}(\xi^i, t)}{t' - t} = u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \boldsymbol{\alpha} = \frac{D\boldsymbol{\alpha}}{Dt} \tag{12}$$

La dérivée de Lie pour le champ de vitesse de la particule, correspond à la variation du tenseur comme elle est vue par la particule en mouvement. On a, de façon intrinsèque :

$$\lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\alpha}\left(\xi^{\mu} + u^{\mu}(t' - t)\right) - \boldsymbol{\alpha}(\xi^{\mu})}{t' - t} = \mathcal{L}_u(\boldsymbol{\alpha}) \tag{13}$$

Pour les composantes contravariantes d'une densité de tenseur de poids W, cet opérateur s'exprime :

$$\mathcal{L}_u(\alpha)^{\mu\nu} = u^{\lambda} \frac{\partial \alpha^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \alpha^{\lambda\nu} \frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \alpha^{\mu\lambda} \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + W \alpha^{\mu\nu} \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} \tag{14}$$

On peut montrer que cette dérivée de Lie est également invariante par superposition de mouvements rigides [7].

5 Description d'un milieu continu

Des définitions générales ont été proposées pour les déformations dans un formalisme 4D par Lamoureux-Brousse [8]. Deux mouvements différents ξ^i et ξ'^i du même volume de matière sont comparés. Ces mouvements sont décrits dans les systèmes de coordonnées x^{μ} et x'^{μ}, associés aux composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et $g'_{\mu\nu}$. On peut alors définir la généralisation du gradient de la transformation comme :

$$F'^{\mu}_{\ \nu}(\xi'^{\mu}, \xi^{\nu}) \equiv \frac{\partial \xi'^{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} \tag{15}$$

et un tenseur des déformations $\boldsymbol{e}$ comme :

$$e_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}) \tag{16}$$

où $b_{\mu\nu} = F'^{\alpha}_{\ \mu} F'^{\beta}_{\ \nu} g'_{\alpha\beta}$ est la généralisation du tenseur de Cauchy. La dérivée covariante définie par l'équation 11 peut être utiliser avec la quatre-vitesse pour définir un tenseur taux de déformations 4D $\boldsymbol{d}$ tel que

$$d^{\mu}_{\ \nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\nu} u^{\mu} + \nabla_{\mu} u^{\nu}\right) \tag{17}$$

Il est aussi possible de montrer que les composantes spatiales du quatre tenseur moment-énergie correspondent au tenseur des dilatations de Cauchy à la limite non-relativiste. Ce tenseur a une densité de poids égale à un [3]. Les composantes spatiales de la dérivée de Lie du tenseur moment-énergie dans un référentiel inertiel correspondent alors au transport de Truesdell. Les autres transports objectifs du tenseur des contraintes de Cauchy définis classiquement, ne sont pas de vraies dérivées par rapport au temps (au sens mathématiques de variations), ils ne devraient donc pas être utilisés comme tel dans les modèles de comportement ou les calculs numériques. Ils ne sont pas non plus invariants par changement de référentiels le plus général.

6 Construction d'un modèle hypo-élastique

En utilisant les mêmes raisonnements qu'en 3D, nous supposons qu'une fonction scalaire différentiable $\psi(\Delta T, \boldsymbol{b})$ existe telle que :

$$\sigma^{\mu}{}_{\nu} \quad = \quad -2\frac{\rho}{\rho'}\, b^{\mu}{}_{\kappa}\frac{\partial\psi(\Delta T, \boldsymbol{b})}{\partial b^{\nu}{}_{\kappa}} \tag{18}$$

Cette équation doit être interprétée comme une généralisation de l'approche 3D [9, 10]. Il est alors possible d'évaluer les dérivées :

$$\frac{D}{Dt}\left(\sigma^{\mu}{}_{\nu}\right) \quad = \quad \frac{D}{Dt}\left(-2\frac{\rho}{\rho'}\, b^{\mu}{}_{\kappa}\frac{\partial\psi(\Delta T, \boldsymbol{b})}{\partial b^{\nu}{}_{\kappa}}\right) \tag{19}$$

$$\mathcal{L}_u(\sigma)^{\mu}{}_{\nu} \quad = \quad \mathcal{L}_u\left(-2\frac{\rho}{\rho'}\, b^{\mu}{}_{\kappa}\frac{\partial\psi(\Delta T, \boldsymbol{b})}{\partial b^{\nu}{}_{\kappa}}\right) \tag{20}$$

en utilisant les définitions des équations 12 et 13. Prises seules, les équations 18, 19 et 20 représentent le même modèle. Mais ces définitions peuvent être utilisées dans un modèle de comportement plus complexe qui prendront alors un sens différent suivant que l'on choisit 19 ou 20. Le modèle de l'équation 20 traduit par construction l'élasticité ; c'est une dérivée dans le temps, intrinsèque et invariante par superposition de mouvements rigides. En notant que :

$$\mathcal{L}_u(e)_{\mu\nu} = d_{\mu\nu} \tag{21}$$

on peut construire des modèles hypo-élastiques comme par exemple :

$$\mathcal{L}_u(\sigma)^{\mu\nu} = 2\mu d^{\mu\nu} + \lambda d^{\kappa\lambda} g_{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} \tag{22}$$

qui ressemblent aux modèles hypoélastiques 3D classiques mais qui vérifient 18.

7 Conclusion

L'application du principe de covariance dans un formalisme 4D garantit l'invariance par changement de référentiels de toutes relations de la physique. Il est ainsi possible de définir des dérivées dans le temps qui sont invariantes par changement de référentiels. La dérivée de Lie est en plus invariante par superposition de mouvements de corps rigides et permet de construire des modèles hypo-élastiques cohérents.

Références

[1] C. Truesdell, W. Noll, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, 3rd Edition, Springer, 2003.

[2] J. Schouten, Ricci-calculus : An Introduction to Tensor Analysis and Its Geometrical Applications, Springer-Verlag, 1954.

[3] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Co Ltd., 1973.

[4] L. Landau, E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, 4th Edition, Elsevier, 1975.

[5] S. Nemat-Nasser, Plasticity, A Treatise on Finite Deformation of Heterogeneous Inelastic Materials, Cambridge University Press, 2004.

[6] I.-S. Liu, On euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference, Continuum Mech. Thermodyn. 16 (2004) 177–183.

[7] E. Rouhaud, B. Panicaud, R. Kerner, Canonical frame-indifferent transport operators with the four-dimensional formalism of differential geometry, Computational Materials Science 77 (2013) 120–130.

[8] L. Lamoureux-Brousse, Infinitesimal deformations of finite conjugacies in non-linear classical or general relativistic theory of elasticity, Physica D. 35 (1989) 203–219.

[9] B. Panicaud, E. Rouhaud, A frame-indifferent model for a thermo-elastic material - beyond the three-dimensional eulerian and lagrangean descriptions, Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics.

[10] I. Müller, T. Ruggeri, Rational extended Thermodynamics, Springer, 1998.